

1.0 Kleine Zahlenkunde und ihre Mengen

In diesem Text werden die Grundbegriffe der Mathematik geklärt, dazu das grundlegende Verständnis von Zahlen.

Diese Begriffe solltest du lernen, damit man nicht aneinander vorbei redet.

Alle Zahlen bestehen aus einem **Vorzeichen** und einem **Betrag**.

Das Vorzeichen ist entweder + oder - , (plus-positiv oder minus-negativ)

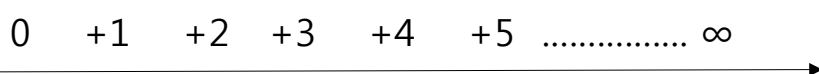
Der Betrag wird mit einer **Ziffer** (ein Zahlzeichen) dargestellt.

Im Alltag haben wir es zumeist mit der Menge der **Natürlichen Zahlen** zu tun.

Sie sind durchweg **positiv** und liegen auf dem **Zahlenstrahl** rechts von der Null.

Die Zahlen sind in der Reihe nach ihrer Größe auf den Zahlenstrahl sortiert.

Der rechte Nachbar ist immer größer. Daher deutet der Strahl nach rechts.



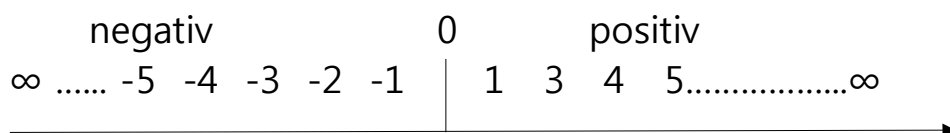
Wegen der besseren Übersichtlichkeit lässt man das Vorzeichen + weg und schreibt nur die Ziffer für den Betrag.

Wenn nötig, darf man das Vorzeichen wieder zufügen.

Oft in dieser Form: (+5) eingeklammert.

Die Menge aller Natürlichen Zahlen ist unendlich ∞.

Nehmen wir zu den natürlichen Zahlen die **negativen** Zahlen dazu, so erhalten wir die Menge der **Ganzen Zahlen**. Dabei liegen die negativen Zahlen links der Null. Die 0 liegt in der Mitte und trennt die beiden Mengen. Je weiter links die Zahl steht, desto kleiner ist sie.



Nun erweitern wir die Menge der Ganzen Zahlen zur Menge der **Rationalen Zahlen**.

Wir fügen die Menge der **Brüche** hinzu.

Brüche sind das Verhältnis von Ganzen Zahlen zueinander.

Meistens stellt man sie mit einem **Bruchstrich**, einem **Zähler** und einem **Nenner** dar.

Man kann sie jedoch auch Division darstellen oder ausgerechnet als **Dezimalbruch**.

Zähler bedeutet: Dividiere Zähler durch Nenner -> Zähler : Nenner .
Nenner

Nach dem Ausführen der Division erhält man den **Dezimalbruch**.

Beispiel: Zähler 3, Nenner 4 => $\frac{3}{4}$ => $3 : 4 = 0,75$

Merke: Sind Zähler **und** Nenner positiv, oder beide negativ, so erhält man immer einen positiven Bruch.
Bei unterschiedlichen Vorzeichen wird der Bruch immer negativ.

2.0 Die Grundrechenarten mit Ganzen Zahlen

Merke: Achte immer beim schriftlichen Rechnen auf absolut saubere Darstellung der Algorithmen (Algorithmus = definierter Rechenweg, Vorschrift)

Schreibe am besten immer auf kariertem Papier die Ziffern nebeneinander und untereinander sorgfältig in die Kästchen. Andernfalls können Fehlrechnungen entstehen.

Die Grundrechenarten sind: Die **Addition**, die **Subtraktion**, die **Multiplikation** und die **Division**.

Wir rechnen mit Ganzen Zahlen, sowohl mit positiven als auch mit negativen Ganzen Zahlen. **Algorithmen** sind Rechenrezepte (Rechenroutinen).

2.1 Die schriftliche Addition

Fall 1 Die Addition von positiven Zahlen.

Aufgabe: $234 + 2345 =$ Algorithmus:
$$\begin{array}{r} 234 \\ +2345 \\ \hline 2589 \end{array}$$

Wir sind damit auf dem Zahlenstrahl vorwärts nach rechts geschritten und bleiben im positiven Bereich mit positivem Ergebnis.
Du kannst dir das auch mit dem *Konto-Modell* vorstellen
Die Einzahlungen auf deinem Bankkonto **erhöhen** dein Guthaben.

Fall 2 Die Addition von negativen Zahlen

Aufgabe: $(-234) + (-2345) =$ $- 234 - 2345 =$

Stehen zwei negative Zahlen hintereinander, so ist das dennoch ein Addition.
Das Operationszeichen + wurde weggelassen.

Da wir uns auf dem Zahlenstrahl zielstrebig mit der negativer Startposition -234 nach links um den Betrag 2345 bewegen, bleiben wir im negativen Bereich.
Daher muss die Summe negativ sein.

Kontomodell: Die Abbuchungen auf deinem Bankkonto summieren sich.
Die Schulden werden größer.

Addiere die Beträge und setze ein Minusvorzeichen vor die Summe

Algorithmus:
$$\begin{array}{r} 234 \\ +2345 \\ \hline - 2589 \end{array}$$
 Minus vor die Summe

Die Addition von negativen und positiven Rationalen Zahlen.

Jetzt kommt es auf die Größe der Beträge an.

Wenn der Betrag der positiven Zahl größer ist als der Betrag der negativen Zahl, dann ist das eine simple Subtraktion. Wie oben.

Wir bleiben im positiven Bereich des Zahlenstrahles mit **positivem Ergebnis**.

Was aber hier? : $-24 + 12 = ???$ Umsortiert: $12 - 24 = ????$

Da der negative Betrag größer ist als der positive Betrag bleiben wir logischerweise im negativen Bereich des Zahlenstrahles und erhalten ein **negatives Ergebnis**.

Auf dem Zahlenstrahl starten wir bei -24 und schreiten um 12 Schritte nach rechts.

Das reicht aber nicht, um die 0 in den positiven Bereich hinein zu überschreiten.

Du hast Schulden auf deinem Konto. Nachdem du eine Überweisungen bekommen hast, wurden die Schulden zwar weniger, du hast aber immer noch kein Guthaben.

Subtrahiere den kleineren vom größeren Betrag und **setze ein Minus vor das Ergebnis**.

Aufgabe: $-24 + 12 =$

Algorithmus: 24

$- 12$

$- 12$

negatives Ergebnis, **setze ein Minus!**
Nicht vergessen!

Gemischte Übungen

a) $-350 + 230 =$

b) $-245 + 400 =$

c) $-2534 + 1456 =$

Und jetzt die positiven Zahlen zuerst.

d) $100 - 200 =$

e) $2543 - 3456 =$

f) $341 - 435 =$

mit Dezimalbrüchen

g) $125,03 - 25,45 =$

h) $5035 - 2046,88 =$

i) $3585,12 - 334,86 =$

Algorithmus wie oben. Die Kommata müssen exakt untereinander stehen.
Fehlende Nachkommastellen mit 0 auffüllen.

Weitere Aufgaben diese Types kannst du dir selbst stellen.

Merke:	positiver Betrag größer	$\Rightarrow$	positives Ergebnis
	negativer Betrag größer	$\Rightarrow$	negatives Ergebnis

3.0 Die schriftliche Multiplikation

Voraussetzung für die Multiplikation ist die Beherrschung des kleinen **Ein mal Eins**.

Die Vielfachreihen der Zahlen von 1 -10 müssen auswendig gebimst, gepaukt oder gedrillt werden. Vorwärts und rückwärts.

Die 2er-Schritte: $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 2 = 6$, $4 \cdot 2 = 8$ $10 \cdot 2 = 20$

Die 3er-Schritte: $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 3 = 9$, $4 \cdot 3 = 12$ $10 \cdot 3 = 30$

und so weiter bis zu den 10er-Schritten.

Danach kommt das große Ein mal Eins. Von den 11er-Schritten bis 20er.
Es wäre sehr vorteilhaft, wenn man die auch könnte. Ansonsten muss man zerlegen.

Die Multiplikation (oder Vervielfältigung) ist nichts anderes als eine abgekürzte Addition.
Das Operationszeichen ist der Punkt zwischen zwei Zahlen. (gesprochen: *mal*)

$3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$ Die 4 wird drei mal als Summand gesetzt
oder $5 \cdot 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6$ Die 6 wird 5 mal als Summand gesetzt.

Man multipliziert zwei oder mehrere **Faktoren** und erhält ein **Produkt** als Ergebnis.
Auch hier auf saubere Darstellung achten!

Aufgabe: $324 \cdot 5 =$ Algorithmus:
$$\begin{array}{r} 324 \cdot 5 \\ \hline 1620 \end{array}$$

Aufgabe: $325 \cdot 23 =$

Algorithmus:
$$\begin{array}{r} 325 \cdot 23 \\ \hline 650 \\ + 975 \quad \leftarrow \text{Achtung!} \\ \hline 7475 \end{array}$$
 Man multipliziert zunächst mit 2 und schreibt das Ergebnis unter den Strich.
Bei der nächsten Multiplikation mit der 2. Stelle des Faktors muss man das Zwischenergebnis um 1 Stelle nach rechts gerückt schreiben.

Danach addiert man die Zwischenergebnisse und erhält das Produkt.

Die Multiplikation von Dezimalbrüchen:

Beispiel: $35,6 * 3 =$

Algorithmus:
$$\begin{array}{r} 35,6 * 3 \\ \hline 106,8 \end{array}$$

$35,6 * 3,2 =$

Algorithmus:
$$\begin{array}{r} 35,6 * 3,2 \\ \hline 1068 \\ + 712 \\ \hline 113,92 \end{array}$$

zusammen 2 Nachkommastellen

113,92 2 Nachkommastellen im Produkt
←

Kommaregel: Das Produkt muss so viele Nachkommastellen haben, wie die beiden Faktoren zusammen.

Falls du unsicher bist, prüfe mit einer schnellen Überschlagsrechnung.

$$35 * 3 = 105$$

Vorzeichenregel:

Falls beide Beträge positiv oder negativ sind, so ist das Ergebnis IMMER POSITIV.

Beispiel: $- 23 * - 3 = 69$ $23 * 3 = 69$

Ist nur einer der beiden Beträge negativ, so ist das Ergebnis IMMER NEGATIV.

Beispiel: $- 23 * 3 = - 69$ $23 * -3 = -69$

Übungen kannst du dir selbst entwerfen und mit dem Taschenrechner prüfen.

4.0 Schriftliche Division

Divident : Divisor = Quotient

Die Divisionsalgorithmus ist ein wenig kompliziert.

$1250 : 5 = 250$ Wie oft passt die 5 in die 12? 2 mal.

10 Schreibe 2 in den Quotienten

25 Rückwärts rechnen, $2 * 5 = 10$, schreibe 10 darunter und subtrahiere.

25 Ergibt den Rest 2

-- 0 Schreibe den Rest 2 und füge die nächste Stelle 5 des Dividenten an.

Wie oft passt die 5 in die 25? 5 mal. Schreibe 5 in den Quotienten.

Nach der Subtraktion erhalten wir den Rest 0. Danach die letzte Stelle des Dividenten 0 anfügen. 5 passt 0 mal in die 0.

Hänge das Ergebnis 0 an den Quotienten.

Fertig!

Das muss man oft üben, damit man den Ablauf flüssig beherrscht.

REGEL:

Sobald du eine 0 (die nicht im Dividenten steht) an den Rest hängen musst, **MUSST DU DAS KOMMA IM QUOTIENTEN SETZEN.**
DAS KOMMA ZUERST, dann erst weiter rechnen.

$265 : 8 = 33,125$

24

25

24

10 Die 0 ist oben nicht vorrätig.

8 KOMMA SETZEN! Weiter rechnen.

20 0 an den Rest setzen.

16

40 0 an den Rest setzen.

40

-- FERTIG! Kein Rest mehr!

Oft Kommt der Rest 0 nach mehreren Stellen hinter dem Komma, oder sogar nie.
Manchmal wiederholt sich ein Abschnitt im Algorithmus immer wieder. Das nennt man eine **Periode**.
Was darf man dann machen? Beispiel $7 : 6 = 1,16666....$ Die 6 wiederholt sich endlos.
Dann schreibst du einen Strich (Periodenstrich) ÜBER die Ziffernfolge, welche sich ständig wiederholt.

$$7 : 9 = 0,77777.... \quad 0,\overline{77}$$